

# A Transição BCS-BEC

P. E. S. Tavares\*

Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo,  
Caixa Postal 369, 13560-970 São Carlos, SP, Brasil

Neste artigo será apresentado os conceitos envolvidos na transição BCS-BEC. Primeiramente será mostrado uma descrição qualitativa dessa transição e posteriormente uma descrição teórica simples, em  $T = 0$ . O propósito desse trabalho é destacar as principais diferenças entre o problema da transição e os limites BCS e BEC. Também iremos indicar os efeitos causados para um temperatura finita.

PACS numbers: 03.75.Ss, 05.30.Fk, 74.20.Fg

## I. INTRODUÇÃO

Gases ultrafrios proporcionam um novo cenário para explorar sistemas quânticos interagentes. Estes gases possuem várias características que facilitam esses estudos, como já foi, e ainda é, amplamente demonstrado nas pesquisas em condensados de Bose-Einstein (BEC). Esta fase superfluida foi realizada em 1995 quando átomos alcalinos, como  $^{87}\text{Rb}$ , foram resfriados à temperaturas de nanoKelvin através de técnicas de resfriamento através de laser e resfriamento evaporativo [1, 2]. O BEC alcalino criado era fracamente interagente e a condensação era facilmente observada. Entretanto, recentemente experimentos alcançaram a condensação de Bose-Einstein com interações interatômicas muito maiores do que as dos gases alcalinos típicos, e ainda mais, essas interações podem ser controladas via *Ressonâncias de Feshbach* [3, 4].

Ao mesmo tempo da produção do primeiro BEC fortemente interagente, as técnicas aplicadas para esse sistema também foram utilizadas para outra classe de partículas, os férmions. Os experimentos em férmions ultrafrios foram motivados pela possibilidade de se criar um condensado de Fermi ou, equivalentemente, um Fermi superfluido [6, 7]. Isto requer que os átomos fermiônicos formem pares, como os *pares de Cooper* de elétrons em supercondutividade [5]. Em supercondutores convencionais, o emparelhamento de onda- $s$  ocorre entre um elétron de *spin-up* e outro de *spin-down*. Em gases ultrafrios, o emparelhamento de onda- $s$  ocorre similarmente, ou seja, entre duas componentes do gás atômico com uma mesma energia de Fermi. Essas duas componentes podem ser, por exemplo, uma mistura com a mesma quantidade de átomos alcalinos em dois estados hiperfinos diferentes. Assim, o par de Cooper de átomos é formado em baixas temperaturas e quando a interação entre os férmions forem atrativas e suficientemente fortes.

Os fenômenos da supercondutividade e da superfluidade têm fascinado os físicos desde o século 20. Em 1911, a supercondutividade foi descoberta quando a resistência do mercúrio foi observada ir a zero abaixo de uma tempe-

ratura crítica [8]. E, em 1957, Bardeen, Cooper e Schrieffer (BCS) formularam a teoria sobre a supercondutividade [11, 12], a qual prediz que, em sistemas fermiônicos abaixo de uma certa temperatura, há a formação uma energia de excitação mínima, ou também chamada de *gap*, no condutor. Com essa teoria, muitas propriedades de superfluidos e supercondutores podem ser explicadas, como veremos nas seções seguintes.

## II. EMPARELHAMENTO EM UM GÁS DE ÁTOMOS FERMIONICOS

Como discutido na seção I, superfluidos são fundamentalmente associados às propriedades quânticas de bósons. Portanto, para criar um superfluido, a partir de um sistema fermiônico, é necessário emparelhar os férmions. A maneira mais simples de imaginar um emparelhamento de férmions é criar um estado ligado de dois corpos, utilizando dois férmions. Nesse caso teremos duas partículas de  $\text{spin}-1/2$  (férmion) que, quando emparelhadas, formam uma única partícula de  $\text{spin}-\text{inteiro}$  (bóson). Na maioria dos experimentos que estudam a transição BCS-BEC, as partículas fermiônicas são átomos (por exemplo,  $^{40}\text{K}$ ) que são forçados a formar uma molécula diatômica. Essas moléculas diatômicas, abaixo de uma temperatura crítica, irão formar um BEC [6]. A figura 1(a) representa um superfluido contendo esse tipo de pares.

No outro processo de emparelhamento, o emparelha-

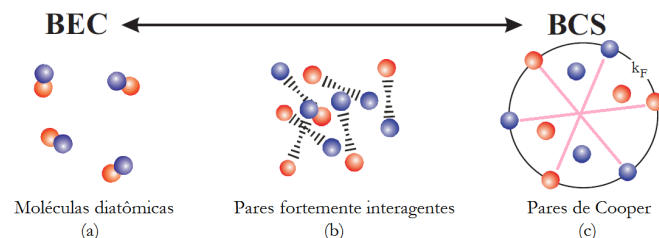


Figura 1: Ilustração do emparelhamento de férmions na transição BCS-BEC. As duas cores representam férmions em dois estados de spins diferentes. Dois estados são necessários se os férmions são emparelhados através da interação de onda- $s$  ( $\ell = 0$ ). Figura adaptada da referência [9].

\*Electronic address: pedro.ernesto.tavares@usp.br

mento de Cooper (Par de Cooper), a natureza básica de sistema fermiônico é muito mais aparente. Cooper considerou o problema de dois férmions, com momentos iguais e opostos, exteriores a um “mar de Fermi” perfeito [5] e notou que, devido o princípio da exclusão de Pauli, esses dois férmions são impedidos de ocuparem os estados de momento  $k < k_F$ , onde  $k_F$  é o vetor de onda Fermi, ou seja, o interior do “mar de Fermi” [10]. Esse par de férmions que é impedido de penetrar na esfera de Fermi, é chamado de *Par de Cooper*.

Considerando, agora, que apenas um par de elétrons esteja livre para emparelhar no exterior do mar da estatística de Fermi, isso não é uma solução suficiente para o fenômeno da supercondutividade pois todos os férmions devem ser permitidos a participar no processo de emparelhamento. A teoria da supercondutividade de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) conseguiu unir a teoria de muitos corpos à esse problema e, com isso, conseguiram descrever com muito sucesso a supercondutividade [11, 12].

Qualitativamente o estado BCS consiste da perda de correlações entre férmions sobre a superfície de Fermi no espaço de momento, Fig. 1(c). Espacialmente, os pares são altamente sobrepostos e não podem simplesmente ser considerado como bósons. No limite BCS, a distribuição de momento apenas muda para o usual mar de Fermi, ou seja, uma região exponencialmente pequena, perto da superfície de Fermi.

É interessante considerar o que acontece se moléculas diatômicas tornar-se cada vez mais fracamente ligadas, ou seja, da visão onde a energia de ligação das moléculas,  $E_b$ , torna-se menor do que a energia de Fermi,  $E_F$ . Ou, também, considerar o aumento da energia de interação de um estado par de Cooper, até próxima da  $E_F$ . A essência da transição BCS-BEC é que estas duas possibilidades descrevem o mesmo estado físico. Como a interação entre férmions é aumentada, haverá uma mudança contínua (ou transição) entre um estado de BCS e um BEC de moléculas diatômicas. O ponto onde dois férmions, no vácuo, teria energia de ligação zero é considerado o ápice do problema da transição, e o emparelhamento de tal estado é representado na figura 1(b). Estes pares têm algumas propriedades de moléculas diatômicas e algumas propriedades de pares de Cooper.

### III. VARIANDO AS INTERAÇÕES

É instrutivo considerar uma situação física que permita a realização emparelhamento por toda a transição (Fig. 1). Suponha que comecemos com um potencial atrativo entre dois férmions atômicos no vácuo, tal como o potencial quadrado com comprimento característico  $r_0$ , mostrado na fig. 2. Se este potencial é muito raso, haverá uma interação atrativa fraca entre os férmions. Se fizermos este potencial mais profundo, a interação entre os férmions torna-se mais forte e, se a atração for forte o suficiente, um estado molecular ligado irá aparecer. Esta molécula vai se tornar cada vez mais fortemente ligada,

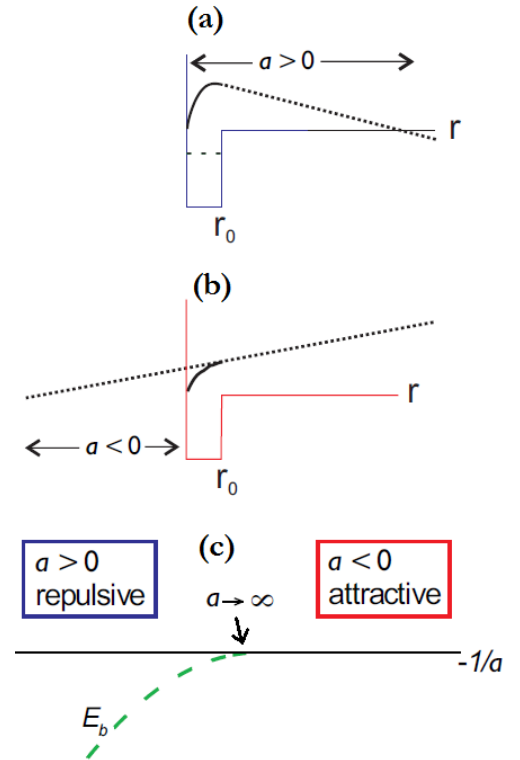


Figura 2: Espalhamento da função de onda na presença de um potencial atrativo (b) e um potencial atrativo mais profundo (a), no regime onde o potencial do estado ligado (linha tracejada) está próximo do *threshold*. Note que o comprimento de espalhamento muda de sinal à medida que o estado ligado move-se através do *threshold*. Figura adaptada da referência [9].

conforme o potencial se torna mais profundo.

A interação neste sistema pode ser caracterizada pelo comprimento de espalhamento de onda- $s$ ,  $a$ . O sinal de  $a$  determina se a interação é atrativa ( $a < 0$ ) ou repulsiva ( $a > 0$ ). A quantidade  $a$  surge do estudos da interação de dois corpos, em baixas energias de espalhamento, e está relacionada com a secção transversal de choque através de  $\sigma = 4\pi a^2$ . As figuras 2(a) e 2(b) mostram uma representação pictórica de  $a$ . Antes do estado ligado aparecer,  $a$  é grande e negativo, o que corresponde a uma forte interação atrativa. À medida que o estado ligado passa através de um valor *threshold* de  $a$ ,  $a$  diverge e, em seguida, torna-se maior e positivo, o que corresponde a uma forte interação repulsiva. Quando  $a$  for muito maior que  $r_0$ , a interação é independente da forma do potencial e, quando  $a > 0$ , está relacionado com a energia de ligação de dois corpos através de  $E_b = \frac{\hbar^2}{ma^2}$ , onde  $m$  é a massa de um férmion [13].

Agora, se considerarmos um conjunto de muitos férmions sob a situação na Fig. 2, temos um sistema que pode ser alterado de BCS para BEC, simplesmente sintonizando o potencial atrativo. Para a extrema direita da Fig. 2(c), temos  $a$  pequeno e negativo e, assim, es-

tamos em um estado de BCS. No lado oposto da figura, temos um conjunto de moléculas diatômicas, e portanto um estado BEC. É importante notar que embora a interação entre os pares de férmions é mais forte no limite de BEC, do ponto de vista das colisões no gás molecular, o limite de BEC é fracamente interagente porque a interação molécula-molécula é fraca.

#### IV. UMA VISÃO TEÓRICA SIMPLES

A teoria BCS foi originalmente aplicada no limite em que a energia de interação é extremamente pequena em comparação com a energia de Fermi. Neste caso, o potencial químico,  $\mu$ , pode ser fixado em  $E_F$ , e isso torna os cálculos razoavelmente simples. Leggett destacou que, se a equação do *gap* do BCS é examinada quando faz-se  $\mu$  variar, essa equação torna-se precisamente a equação de Schrödinger para uma molécula diatômica, no limite em que  $\mu$  domina [14].

Vamos considerar um sistema de Fermi, homogêneo, em três dimensões com uma mistura em mesma quantidade de dois estados diferentes, em  $T = 0$ . A aplicação dos resultados da usual teoria BCS resulta em uma equação para o *gap*

$$\Delta_k = - \sum_{\mathbf{k}'} U_{k\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} , \quad (1)$$

onde  $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}$ ,  $\xi_k = \epsilon_k - \mu$ , e  $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .  $U_{k\mathbf{k}'} < 0$  é a interação atrativa para o espalhamento dos férmions de momento  $k'$  e  $-k'$  para o momento  $k$  e  $-k$ . Também podemos obter a equação para o número de total de férmions em ambos estados,  $N_{tot}$ ,

$$\langle N_{tot} \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \left( 1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right) . \quad (2)$$

Para resolver a Eq. (1) no limite BCS, a abordagem padrão é assumir que o potencial é constante, com um valor  $U < 0$ , o que significa que o *gap* é constante, i.e.,  $\Delta_k = \Delta$ . Neste caso, a equação do *gap*, Eq. (1), fica

$$-\frac{1}{U} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2E_k} . \quad (3)$$

Podemos ver que esta equação pode divergir. No limite de BCS, temos ainda que  $\mu = E_F$ , e que, dado que existe o limite da energia de Debye  $\hbar\omega_D \ll E_F$ , a densidade de estados é constante no valor de  $N(\xi = 0)$ . A equação do *gap* agora torna-se

$$-\frac{1}{N(0)U} = \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} . \quad (4)$$

Resolvendo a Eq. (4) produzimos o resultado de BCS:  $\Delta \approx 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)|U|}$ .

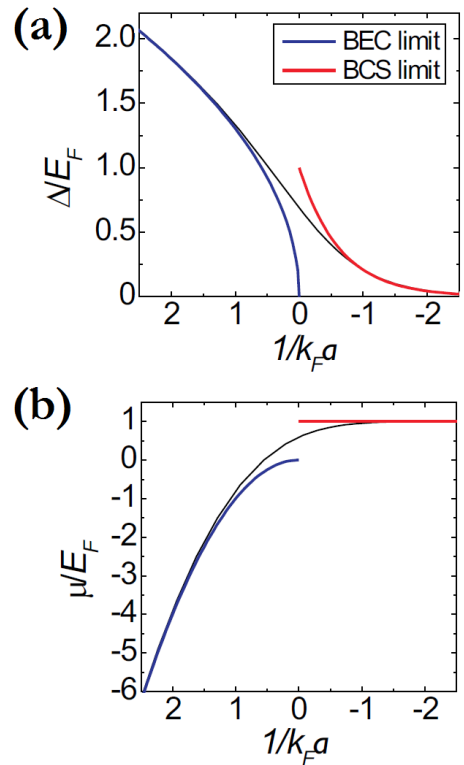


Figura 3: *Gap*,  $\Delta$ , e o potencial químico,  $\mu$ , de um gás de Fermi homogêneo em  $T = 0$ , como determinado através da teoria NSR. As linhas vermelhas e azuis mostram os limites BCS e BEC da teoria. Note que as teorias apenas desviam significativamente da teoria completa no intervalo aproximado de  $-1 < \frac{1}{k_F a} < 1$ . Figura adaptada da referência [9].

Para estender este cálculo a transição em sistemas atômicos, não podemos mais aplicar o corte de  $\hbar\omega_D$ . A solução para o problema da divergência, neste caso, é trivial e requer um procedimento de renormalização, o qual pode ser encontrado na referência [15].

O resultado deste procedimento é uma equação renormalizada para o *gap*:

$$-\frac{m}{4\pi\hbar^2 a} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2E_k} - \frac{1}{2\epsilon_k} \right) , \quad (5)$$

onde a interação é agora descrita pelo comprimento de espalhamento de onda- $s$ ,  $a$ , em vez de  $U$ , e  $V$  é o volume do sistema. Além disso, na transição não podemos assumir  $\mu = E_F$ ; em vez disso, devemos resolver simultaneamente a equação do *gap*, Eq. (5), e a equação do número, Eq. (2), para obter  $\mu$  e o *gap*,  $\Delta$ . Isso pode ser feito resolvendo em função do parâmetro adimensional  $k_F a$ , onde  $\hbar k_F = \sqrt{2mE_F}$ , como feito na referência [16].

As linhas preto na Fig. 3 mostram o resultado dos cálculos de  $\Delta$  e  $\mu$ . Também estão graficados os valores desses dois parâmetros quando calculados nos limites BCS e BEC, onde encontramos que a transição BCS-BEC ocorre numa região relativamente pequena do parâmetro  $1/k_F a$ , ou seja, no intervalo entre  $-1 < \frac{1}{k_F a} < 1$ . Em típicos ex-

perimentos estudando essa transição, com  $^{40}\text{K}$  ou  $^6\text{Li}$ , este regime corresponde ao  $a$  variando de  $-2000a_0$ , atravessando a divergência ( $a \rightarrow \infty$ ), até  $2000a_0$ , onde  $a_0$  é o raio de Bohr.

É útil compreender explicitamente o valor e o significado de ambos  $\Delta$  e  $\mu$  nesses dois limites.  $\mu$  é a  $E_F$  no limite BCS, e  $-E_b/2 = -(\frac{1}{k_F a})^2 E_F$  no limite BEC.  $\Delta$  é a  $E_F e^{-\frac{\pi}{k_F |a|}}$  no limite BCS, e  $E_F \sqrt{\frac{16}{3\pi} \frac{1}{k_F a}}$  no limite BEC [16].

## V. ALÉM DE $T = 0$

Um parâmetro muito importante para qualquer sistema superfluido é a chamada temperatura de transição de fase,  $T_c$ . Na transição BCS-BEC a  $T_c$  aumenta conforme a interação é aumentada, isto é, ela é mais baixa no regime de BCS e mais elevada no limite BEC. Em um sistema homogêneo, no limite BCS temos  $T_c/T_F = \frac{8}{\pi} e^{\gamma-2} e^{-\frac{\pi}{2k_F |a|}}$ , onde  $\gamma = 0.58$  [17], e, no limite BEC  $T_c/T_F = 0.22$  [18]. Note que  $T_c$  no limite BCS pode ser extremamente pequena, devido à dependência exponencial em  $1/k_F a$ .

No limite BCS, o emparelhamento e a transição de fase para um estado superfluido ocorrem à mesma temperatura. No entanto, no limite BEC isto não é o caso. É natural esperar que haveria uma transição entre estes dois comportamentos na transição BCS-BEC, ou seja, no auge

da transição, a temperatura de emparelhamento,  $T^*$ , seria distinta de  $T_c$ , porém não muito diferente.

## VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As discussões e cálculos neste artigo, enquanto fornecem uma introdução básica à teoria da transição BCS-BEC, estão distante da atual situação dessa teoria. Por exemplo, o resultado para o potencial químico na singularidade (onde  $1/k_F a = 0$ ) é significativamente diferente do resultado de cálculos mais precisos usando simulações de Monte Carlo [19, 20]. Assim, é evidente que a adição de ordem superior para correlações na teoria da transição BCS-BEC teoria é necessária.

A possibilidade de executar a transição BCS-BEC em laboratório foi implementada pelo grupo de D. S. Jin, no JILA [9], onde eles utilizam  $^{40}\text{K}$  como a amostra fermiônica, misturados nos estados hiperfinos  $|F = 9/2, m_F = 9/2\rangle$  e  $|F = 9/2, m_F = 7/2\rangle$ , outros grupo também realizaram essa transição em diferentes espécies fermiônicas. Muitos estudos envolvendo a transição BCS-BEC vêm sido feitos, como por exemplo, estudos na mudança da distribuição de momento nessa transição [21], estudos das oscilações coletivas ao longo da transição [22], a variação da expansão de nuvem ultrafria na transição [23] e a mudança da velocidade crítica do escoamento superfluido na transição [24].

- 
- [1] M. H. Anderson, *et al.* *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor.* Science **269**, 198-201 (1995).
- [2] K. B. Davis, *et al.* *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms.* Phys. Rev. Lett. **75**, 3969-3973 (1995).
- [3] S. Inouye, *et al.* *Observation of Feshbach resonance in a Bose-Einstein condensate.* Nature **392**, 151-154 (1998).
- [4] J. L. Roberts, *et al.* *Resonant Magnetic Field Control of Elastic Scattering in Cold  $^{85}\text{Rb}$ .* Phys. Rev. Lett. **81**, 5109-5112 (1998).
- [5] L. N. Cooper. *Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas.* Phys. Rev. **104**, 1189-1190 (1956).
- [6] C. Regal, *et al.* *Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs.* Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).
- [7] M. Zwierlein, *et al.* *Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas.* Nature **435**, 1047-1051 (2005).
- [8] H. K. Onnes. *On the sudden rate at which the resistance of mercury disappears.* Akad. van Wetenschappen **14**, 818 (1911).
- [9] C. Regal. *Experimental realization of BCS-BEC crossover physics with a Fermi gas of atom.* Thesis (Doctor of Philosophy) - Department of Physics, University of Colorado, Boulder, USA. 2005. Disponível em: <http://www.arXiv:cond-mat/0601054>.
- [10] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys.* Addison-Wesley, California, 1966.
- [11] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. *Microscopic theory of superconductivity.* Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
- [12] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. *Theory of superconductivity.* Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [13] J. J. Sakurai. *Modern quantum mechanics.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.
- [14] A. J. Leggett. *Cooper pairing in spin-polarized Fermi systems.* J. Phys. C. (Paris) **41**, 7 (1980).
- [15] M. Randeria. *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke, and S. Stringari. Cambridge Univ., Cambridge, UK, 1995. pp. 355-392.
- [16] M. Marini, F. Pistolesi, and G. C. Strinati. *Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation: Analytic results for the crossover in three dimensions.* Eur. Phys. J. B **1**, 151 (1998).
- [17] R. Haussman. *Properties of Fermi liquid at the superfluid transition in the crossover region between BCS superconductivity and Bose-Einstein condensation.* Phys. Rev. B **49**, 12975 (1994).
- [18] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein condensation in dilute gases.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2002.
- [19] J. Carlson, S.-Y. Chang, V. R. Pandharipande, and K. E. Schmidt. *Superfluid Fermi gases with large scattering length.* Phys. Rev. Lett. **91**, 050401 (2003).
- [20] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, and S. Giorgini. *Equation of state of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover: A quantum Monte Carlo study.* Phys.

- Rev. Lett. **93**, 200404 (2004).
- [21] C. A. Regal, *et al.* *Momentum distribution of a Fermi gas of atoms in the BCS-BEC crossover*. Phys. Rev. Lett. **95**, 250404 (2005).
- [22] A. Altmeyer, *et al.* *Precision Measurements of Collective Oscillations in the BEC-BCS Crossover*. Phys. Rev. Lett. **98**, 040401 (2007).
- [23] J. Zhang, *et al.* *Expansion of a lithium gas in the BEC-BCS crossover*. In ATOMIC PHYSICS 19: XIX International Conference on Atomic Physics; ICAP 2004. Disponível em: [http://proceedings.aip.org/resource/2/apcpcs/770/1/228\\_1](http://proceedings.aip.org/resource/2/apcpcs/770/1/228_1)
- [24] D. E. Miller, *et al.* *Critical Velocity for Superfluid Flow across the BEC-BCS Crossover*. Phys. Rev. Lett. **99**, 070402 (2007).